Übungsklausur Exponentialfunktion (Schweinegrippe)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die Ableitung von $f(x) = x \cdot e^{-3x}$.

2) Gib jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + x$

b) $f(x) = 2(x^2 - 3e^{3x})$

3) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 + 2e^{-x}$.

a) Untersuche f auf Asymptoten. Zeige, dass f streng monoton fällt.
Skizziere ein Schaubild von f.

b) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von f, der x- und der y-Achse sowie der Geraden $x = 3$ begrenzt wird.

4) Wie lautet die Funktionsgleichung des Schaubilds, wenn man das Schaubild von $f(x) = e^x$

a) in Richtung der positiven y-Achse um 2 verschiebt?

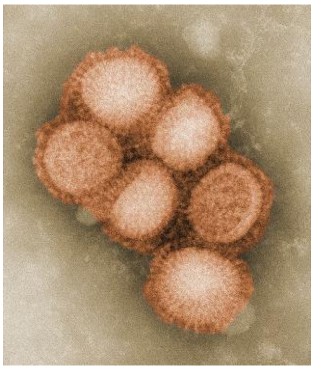
b) in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 3 streckt und dann an der x-Achse spiegelt?

5) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $e^{x^2} = e^{-x^2+8}$

b) $e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 2 = 0$

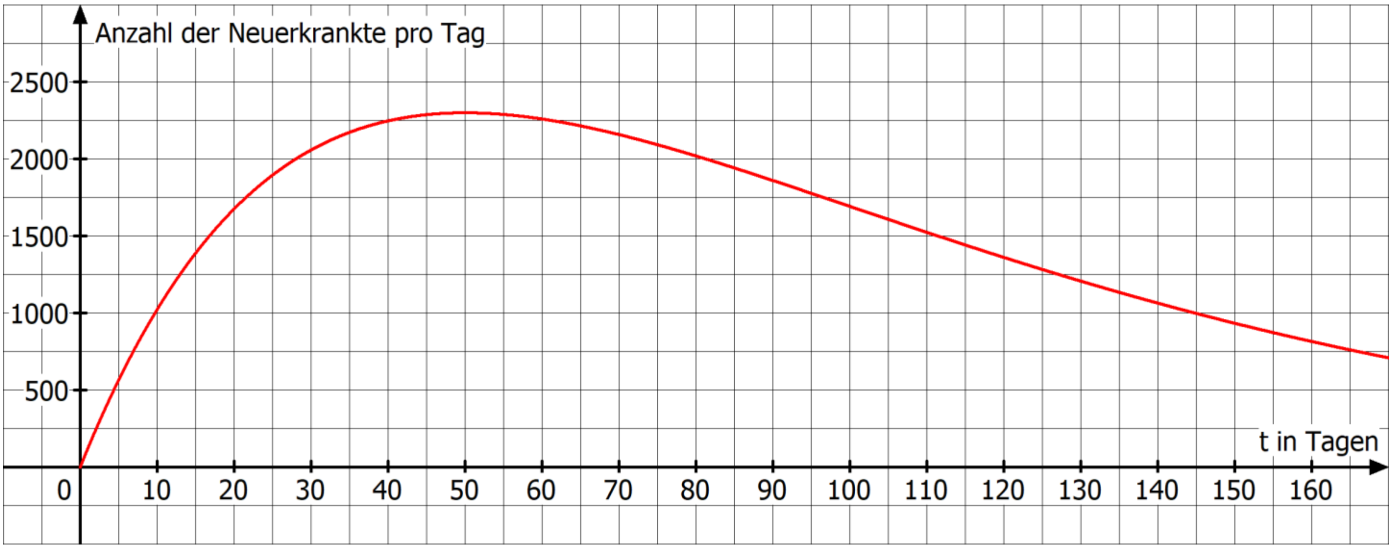
Übungsklausur Exponentialfunktion (Schweinegrippe)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



Anfang Mai 2010 warnte die Weltgesundheitsorganisation (WHO) vor dem Influenzavirus-Subtyp A/H1N1, dem so genannten Schweinegrippe-Virus. Um eine Vorhersage für die Ausbreitung der Schweinegrippe zu machen hat die WHO eine Modellfunktion f aufgestellt:

$f(t) = 125 \cdot t \cdot e^{-0{,}02t}$

mit t: Zeit in Tagen seit dem 1. Mai (= Beobachtungsbeginn),
f(t): Anzahl der Neuerkrankten pro Tag. Der Verlauf der Modellfunktion f ist durch den unten stehenden Graphen dargestellt.



a) Beantworte mit Hilfe des Graphen:
   (1) Wie groß war die Anzahl der Neuerkrankten pro Tag nach 5 Tagen?
   (2) Wie viele Tage nach Beobachtungsbeginn war die Anzahl der Neuerkrankten pro Tag am größten?
   Wie viel Neuerkrankte kamen hier täglich dazu?
   (3) Ab welchem Tag lag die Anzahl der Neuerkrankten pro Tag schon über 1000?

b) Nach der Modellfunktion hat sich der Schweinegrippevirus auf alle Kontinente der Erde ausgebreitet, sobald der Wendepunkt der Funktion f(t) erreicht ist. Bestimme diesen Tag rechnerisch.

c) (1) Zeige, dass durch die Funktion $F(t) = \dfrac{125 - 125(1 + 0{,}02t) \cdot e^{-0{,}02t}}{(0{,}02)^2}$ die Anzahl der insgesamt seit Anfang Mai an der Schweinegrippe erkrankten Personen beschrieben werden kann.
   (t : Zeit in Tagen seit dem 1. Mai, F(t) : Anzahl der an der Schweinegrippe Erkrankten)
   (2) Wie viele Menschen waren am 1. Juni an der Schweinegrippe erkrankt?
   (3) Wie viele Menschen werden langfristig an der Schweinegrippe erkranken?

Übungsklausur Exponentialfunktion (Schweinegrippe)

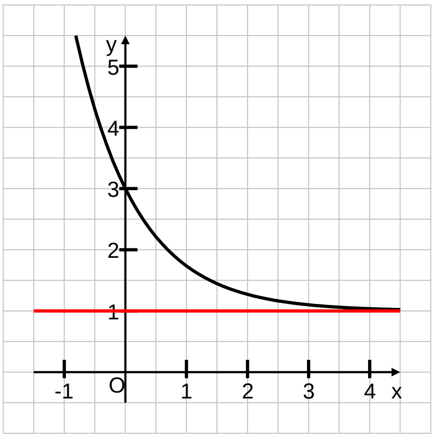
Lösungen Pflichtteil:

1) $f'(x) = e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x}$

2) a) $F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2$ b) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2e^{3x}$

3) a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ ist waagerechte Asymptote für $x \to \infty$

$f'(x) = -2e^{-x} < 0 \;\forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend



b) $A = \int_0^3 (1 + 2e^{-x})dx = \left[x - 2e^{-x}\right]_0^3 = 3 - 2e^{-3} + 2 = 5 - \frac{2}{e^3}$

4) a) $y = e^x + 2$ b) $y = -3e^x$

5) a) $x^2 = -x^2 + 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow L = \{-2; 2\}$

b) Subst. $u = e^{\frac{1}{2}x}$: $u^2 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1; u_2 = -2$

Rücksubst.: $1 = e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow x = 0$ $-2 = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow k.L. \Rightarrow L = \{0\}$

Übungsklausur Exponentialfunktion (Schweinegrippe)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $f(5) \approx 600 \Rightarrow$ 600 Neuerkrankte pro Tag

(2) Maximum von f(t): H(50 | 2300) $\Rightarrow$ nach 50 Tagen war die Anzahl der Neuerkrankten pro Tag am größten, es kamen etwa 2300 Neuerkrankte pro Tag hinzu.

(3) $f(t) = 1000 \Rightarrow t \approx 10 \Rightarrow$ Ab dem 10ten Tag.

b) $f'(t) = 125e^{-0,02t} + 125 \cdot t \cdot e^{-0,02t} \cdot (-0,02) = (125 - 2,5t) \cdot e^{-0,02t}$

$f''(t) = -2,5 \cdot e^{-0,02t} + (125 - 2,5t) \cdot e^{-0,02t} \cdot (-0,02) = (-2,5 - 2,5 + 0,05t) \cdot e^{-0,02t} = (-5 + 0,05t) \cdot e^{-0,02t}$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow (-5 + 0,05t) \cdot e^{-0,02t} = 0$

$-5 + 0,05t = 0$ oder $e^{-0,02t} = 0$

$0,05t = 5$ k. L.

$t = 100$

$t = 100 \mathrel{\hat{=}} 11.$ August

c) (1) Zeige: (I) $F'(t) = f(t)$ und (II) $F(0) = 0$

(I) $F'(t) = \dfrac{-125 \cdot 0,02e^{-0,02t} - 125(1+0,02t)e^{-0,02t} \cdot (-0,02)}{(0,02)^2} = \dfrac{-2,5e^{-0,02t} + 2,5e^{-0,02t} + 0,05te^{-0,02t}}{0,0004}$

$= 125 \cdot t \cdot e^{-0,02t} = f(t)$

(II) $F(0) = \dfrac{125 - 125(1 + 0,02 \cdot 0) \cdot e^{-0,02 \cdot 0}}{(0,02)^2} = \dfrac{125 - 125 \cdot 1}{(0,02)^2} = 0$

(2) $F(30) = 38094 \Rightarrow$ ca. 38.000 Menschen

(3) Für $t \to \infty$ gilt $F(t) = \dfrac{125 - 125\overbrace{(1 + 0,02t) \cdot e^{-0,02t}}^{\to 0}}{(0,02)^2} \to \dfrac{125}{(0,02)^2} = 312.500$

Zu *: Die Exponentialfunktion wächst / fällt schneller, als jede Potenzfunktion.